

Euclide questo sconosciuto



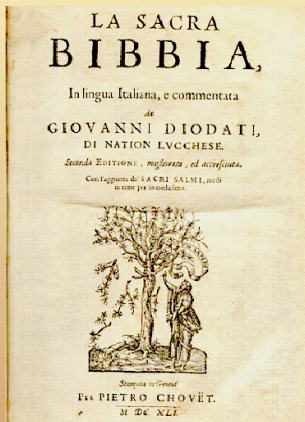
Università degli Studi di Genova



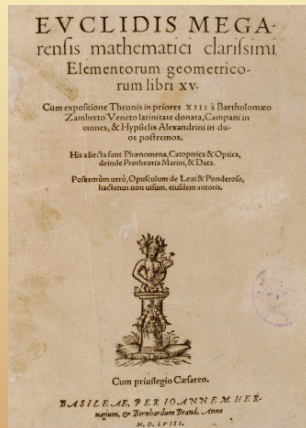
Un fatto poco noto

Quale libro ha avuto più edizioni al mondo?

Quale libro viene al secondo posto?



La Bibbia



Gli Elementi di Euclide

Euclide questo sconosciuto

Cosa sono gli Elementi di Euclide ?

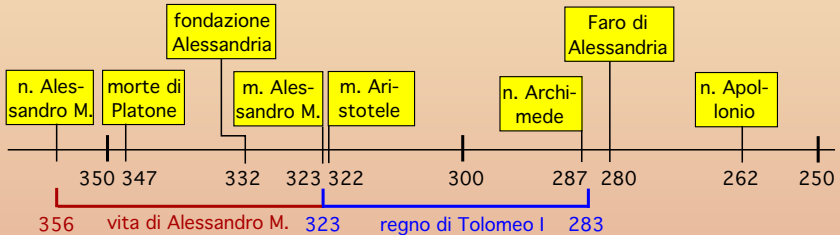
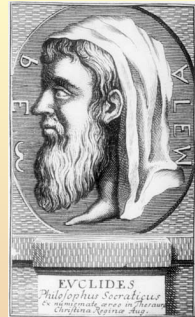


Euclide - Justus di Ghent
ca. 1474 - Urbino

- ▶ È un trattato di Geometria.
- ▶ Risale circa al III secolo a.C.
- ▶ È diviso in 13 Libri.
- ▶ È scritto in greco classico (attico).
- ▶ Geometria del piano e dello spazio.
- ▶ Teoria delle proporzioni
Aritmetica dei numeri
Solidi platonici.

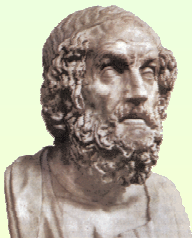
Chi era Euclide

- ▶ Quasi nessun dato biografico
- ▶ A volte è detto **Euclide di Alessandria**.
- ▶ **Proclo** nel V secolo scrisse un “**Commento agli Elementi**” e ci dà qualche scarsa indicazione.
- ▶ Altri indizi da **Pappo** (II sec.d.C.) e **Stobeo** (V sec.d.C.).



Piccola digressione su Omero

Anche i poemi di Omero, il più celebre poeta dell'antichità, sono stati tra le opere letterarie più diffuse al mondo.



Iliade



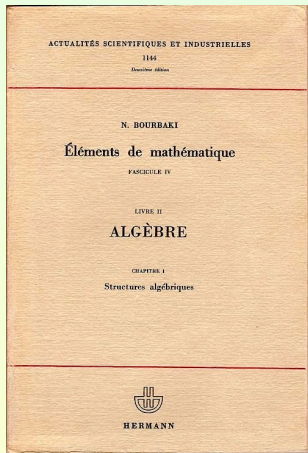
Odissea



Ma di Omero non si sa praticamente niente, a parte qualche leggenda.

E molti dubitano anche che sia esistito, e ritengono che i suoi poemi siano un collage di opere di vari autori

Euclide come Omero. È esistito davvero?



È presente in tutte le biblioteche di matematica un'opera colossale:

N. Bourbaki
“Éléments de mathématique”

Più di venti volumi
Pubblicata in Francia tra il 1935 e il 1968 (e anche dopo).

Ma non c'è mai stato un matematico di nome **N. Bourbaki**.
È un pool di matematici che hanno voluto mantenere l'anonimato

Forse anche Euclide è uno pseudonimo o un gruppo di matematici...

Euclide primo geometra di cui abbiamo un'opera



Euclide (dalla "Scuola di Atene")
Raffaello - ca. 1510 - Vaticano

Secondo Proclo: Euclide attinse da

Talete, che imparò la matematica dagli Egizi (secondo **Erodoto**).

Pitagora, il sommo.

La matematica pre-euclidea è praticamente sconosciuta.

Talete e **Pitagora** sono avvolti nella leggenda.

Di **Teeteto**, **Ippocrate di Chio** e **Eudosso di Cnido** non si sa quasi niente.

Ci sono giunti due aneddoti

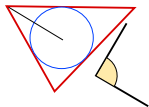
(da Proclo e Stobeo, V secolo d.C.)



- ▶ Non esistono vie regie alla geometria



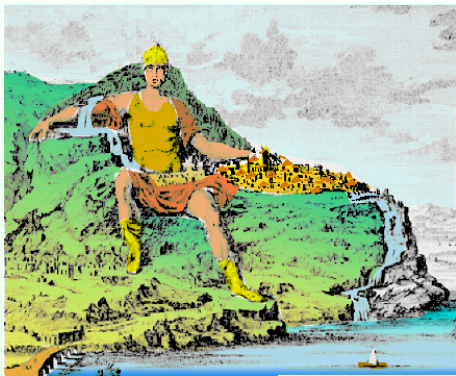
- ▶ Dategli una monetina perché possa dire di aver ricavato qualcosa



Dove sono stati scritti gli Elementi?

Alessandro Magno voleva costruire una città col suo nome

L'architetto Dinocrate propose di modellare il monte Athos come statua di Alessandro.



Dove sono stati scritti gli Elementi?

Alessandro Magno voleva costruire una città col suo nome



Alessandro preferì far costruire a Dinocrate una città su una lingua di sabbia in Egitto.



E nacque nel 332 a.C. la città di **Alessandria**

Alessandria, una città modernissima



Alessandria città monumentale



Alessandria centro culturale e tecnologico

Il Faro



settima meraviglia del mondo

Euclide
Erofilo
Eratostene

Ctesibio
Abdaraxos
Archimede

Meccanica
Filologia
Grammatica
Medicina
Psicanalisi
Astronomia
Geometria



La Biblioteca

Alessandria oggi

Il Faro



Poco resta dell'antica città
anche se **Alessandria**
cerca di ricordare il
glorioso passato

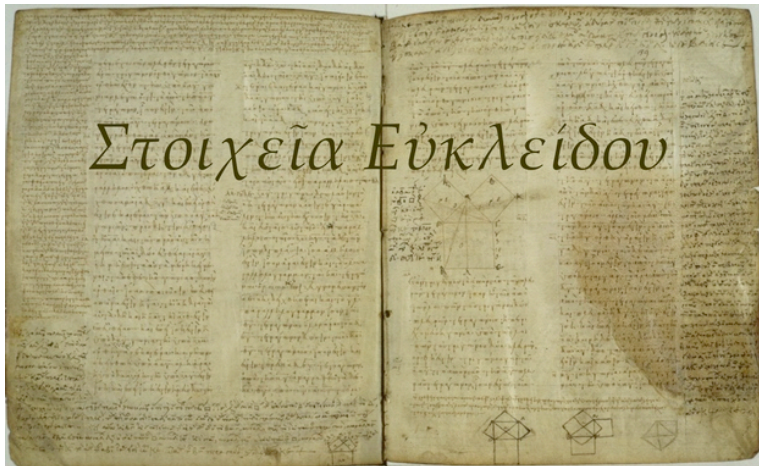
distrutto e sostituito da un fortino



La modernissima Biblioteca

Purtroppo gran parte della scienza alessandrina è andata perduta

Di Euclide ci sono rimasti gli Elementi,
ma non si sa niente dell'autore



Come ci sono pervenuti gli Elementi?

110
الاولى

مجموع مربعي الضلعين المحيطين بها

لكن الزاوية بآح من مثلث آب ح
قائمة فقول ان مربع ب ح يساوي مجموع
مربعي آ ب ح برصانه نوسم على اضلاع
مثلث آ ب ح مربعات بدهم آ ح ك ط
ابح برالشكل المتقدم ونخرج من نقطة آ
خط آل موازيا لخط بده بالشكل الواحد
والتلئين فلان زاويتي آ بده بالآ كقائتين
بالشكل التاسع والعشرين وزاوية آ بده
اعظم من قائمة فزاوية بيآل اصغر منها

الاضلاع ضعف مثلث آ ب د ومربع آ ح ضعف مثلث ح ب د بالشكل
الواحد والاربعين فربع آ ب كسطح بيآل ولان شكل واحدة من زاويتي
بده آ ح قائمة فمخاخذ زاوية آ ب ح مع كل واحدة منهما فتكون زاويتا
آ ح ب و ب ح آ متساويتين والاضلاع المحيطتة بهما متساوية على التناظر
فبالشكل الرابع مثلث آ ح ب مثلث ح ب آ مثلث آ ح ب ضعف مثلث
ب ح د وسطح آل ضعف مثلث آ ح ب بالشكل الواحد والاربعين فربع
آ كسطح آل فلنحكم ثابت وذلك ما اردنا ان نبي

وأيضا الشكل اختلاف وقوع فان مربع بده آ ما ان يقع في حية القاعدة
من زاوية بآ ح او يطبق على مثلث آ ب ح وعلى التقديرين فربعا
آ ح آ ما ان يقصا غير منطبقين على مثلث آ ب ح او منطبقين عليه او
يقع مربع آ ح منطبقا عليه ومربع آ ح غير منطبق او بالعكس وهذه
ثلاثة اوجه اما الاول فقد بنناه وله ثلثة اوضاع بحسب ضلبي آ ح
والتساوي والصغر والكبر وذلك ظاهر واما الثاني فضعل آ ح ما ان يكون
مساويا لاضلع آ ح او اعظم او اصغر منه فنقطتة آ ح ما ان يطبق على

45

111
الثانية

مجموع مربعي الضلعين المحيطين بها

لكن الزاوية بآح من مثلث آ ب ح
قائمة فقول ان مربع ب ح يساوي مجموع
مربعي آ ب ح برصانه نوسم على اضلاع
مثلث آ ب ح مربعات بدهم آ ح ك ط
ابح برالشكل المتقدم ونخرج من نقطة آ
خط آل موازيا لخط بده بالشكل الواحد
والتلئين فلان زاويتي آ بده بالآ كقائتين
بالشكل التاسع والعشرين وزاوية آ بده
اعظم من قائمة فزاوية بيآل اصغر منها

الاضلاع ضعف مثلث آ ب د ومربع آ ح ضعف مثلث ح ب د بالشكل
الواحد والاربعين فربع آ ب كسطح بيآل ولان شكل واحدة من زاويتي
بده آ ح قائمة فمخاخذ زاوية آ ب ح مع كل واحدة منهما فتكون زاويتا
آ ح ب و ب ح آ متساويتين والاضلاع المحيطتة بهما متساوية على التناظر
فبالشكل الرابع مثلث آ ح ب مثلث ح ب آ مثلث آ ح ب ضعف مثلث
ب ح د وسطح آل ضعف مثلث آ ح ب بالشكل الواحد والاربعين فربع
آ كسطح آل فلنحكم ثابت وذلك ما اردنا ان نبي

وأيضا الشكل اختلاف وقوع فان مربع بده آ ما ان يقع في حية القاعدة
من زاوية بآ ح او يطبق على مثلث آ ب ح وعلى التقديرين فربعا
آ ح آ ما ان يقصا غير منطبقين على مثلث آ ب ح او منطبقين عليه او
يقع مربع آ ح منطبقا عليه ومربع آ ح غير منطبق او بالعكس وهذه
ثلاثة اوجه اما الاول فقد بنناه وله ثلثة اوضاع بحسب ضلبي آ ح
والتساوي والصغر والكبر وذلك ظاهر واما الثاني فضعل آ ح ما ان يكون
مساويا لاضلع آ ح او اعظم او اصغر منه فنقطتة آ ح ما ان يطبق على

46



Giovanni Campano

da Novara

tradusse **Gli Elementi**

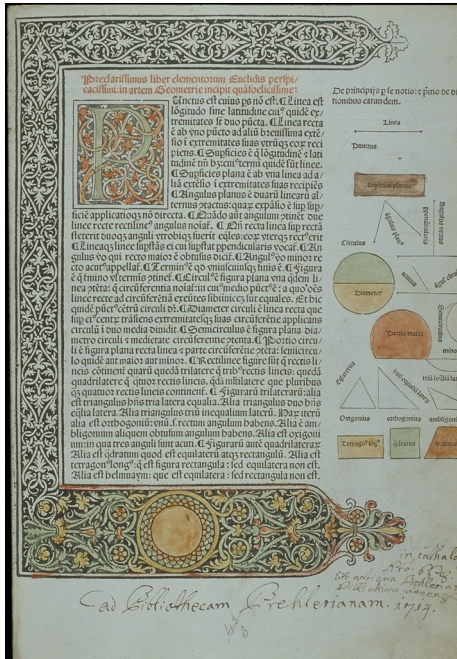
in latino dall'arabo

nel 1255 circa

*Il primo libro
stampato al mondo
con figure
geometriche*

Venezia - 1482

*Preclarissimus liber
elementorum Euclidis*



F.Odetti



UniGe

Εὐκλείδου Στοιχεῖα

στοιχεῖον = elemento

Per i platonici **στοιχεῖα**
erano i quattro elementi



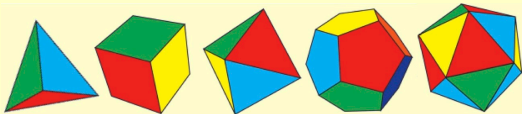
Euclide è detto **Στοιχειωτής**

Comunque useremo “Libro” invece di “Elemento”

Piano generale dell'opera:

È costituito da 13 Libri (*ιγ' στοιχεῖα*)

- 1 geometria del piano:
dalle definizioni elementari al teorema di Pitagora
- 2 3 4 geometria del piano; i poligoni, la circonferenza
- 5 teoria delle proporzioni
- 6 uso delle proporzioni: similitudini
- 7 8 9 numeri primi, massimo comun divisore, numeri perfetti
- 10 grandezze incommensurabili (il più vasto e difficile)
- 11 12 geometria dello spazio:
parallelepipedi, prismi, piramidi, coni, sfere
- 13 solidi platonici



Come sono strutturati i Libri?

Ogni Libro è diviso in **proposizioni** numerate.

Euclide non usa un termine per **proposizione**, pone solo un numero.

- ▶ Alcune proposizioni sono **teoremi**.
(Euclide non usa questa parola)
e terminano con
ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *ciò che bisognava dimostrare.*
- ▶ Alcune proposizioni sono **costruzioni**.
e terminano con
ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *ciò che bisognava fare.*
- ▶ A volte c'è un **lemma** (λήμμα).
- ▶ A volte c'è un **corollario**, in greco **πόρισμα**.
- ▶ Quasi ogni Libro inizia con le **definizioni**, in greco **ὅροι**.
- ▶ Il primo Libro ha un'introduzione più articolata.

Le definizioni del primo Libro

Il primo Libro inizia con 23 definizioni (κγ' ὅροι)

Le prime quattro **definizioni**

- α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
- β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
- γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
- δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ὅρος significa confine, termine.

La prima definizione

Il primo ὄρος

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

1. Il **punto** è ciò che non ha parti

Letteralmente

1. **Punto** è, [ciò che] non [ha] parte nessuna

Euclide per punto usa **σημεῖον** (che significa anche “segno”)

Prima di Euclide per punto si usava **στιγμή**

Sesto Empirico (II secolo d.C.) in **Πρὸς μαθηματικούς** (Contro i matematici) dice che i matematici affermano:

στιγμήν μὲν εἶναι **σημεῖον** ἀμερὲς καὶ ἀδιάστατον

essere il **punto** un **segno** senza parti e senza estensione

(matematici = grammatici, retori, geometri, aritmetici, astrologi, musici)

Forse la prima definizione non è di Euclide

Seconda e terza definizione

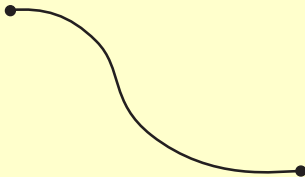
Secondo e terzo ὄρος

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

2. E **linea** è una lunghezza senza larghezza.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεία.

3. E gli **estremi** di una linea sono punti



La quarta definizione

Quarto ὄρος

δ'. **Εὐθεῖα γραμμὴ** ἐστίν, ἣτις **ἐξ ἴσου** τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

4. La **linea retta** è quella che giace **allo stesso modo** rispetto ai suoi punti.

Forse la definizione è apocrifa

Retta è **εὐθεῖα (γραμμὴ)**

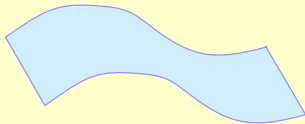
La retta è sempre **terminata**, (**πεπερασμένη**) aggiunge Euclide diverse volte, quindi la parola che Euclide usa per retta indica in realtà un segmento



Altre definizioni interessanti

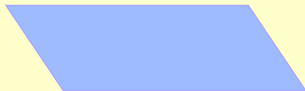
ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

5. **Superficie** è ciò che ha solo lunghezza e larghezza.



ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

7. Il **piano** è una superficie che giace allo stesso modo rispetto alle sue rette.



Altre definizioni

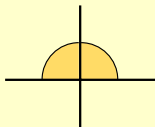
γωνία angolo : inclinazione di due linee (anche non rette).

La retta perpendicolare: **κάθετος εὐθεΐα**

κάθετος significa cadente (ortogonalmente).

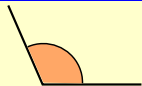
È la retta che forma due angoli uguali:

ognuno è detto **angolo retto**: **ὀρθεΐα γωνία**.



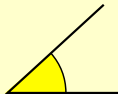
ια'. Ἀμβλεΐα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

11. L'**angolo ottuso** è quello maggiore del retto



ιβ'. Ὄξεϊα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

12. E l'**acuto** è quello minore del retto.

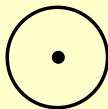


Altre definizioni

κύκλον cerchio

κέντρον centro

περιφερεία circonferenza



Raggio come distanza tra centro e circonferenza:
διάστημα, cioè distanza.



Raggio come segmento dal centro alla circonferenza:
ἡ ἐκ τοῦ κέντρου: la [retta] dal centro.



ἡ διάμετρος il diametro (è un segmento)



Glossario

τρίγωνον triangolo

ἡ πλευρά il lato

ἰσόπλευρον quello equilatero



ἰσοσκελές quello isoscele (stesse gambe)



σκαληνόν quello scaleno (forse da σκάζειν zoppicare).



τετράγωνον quadrato

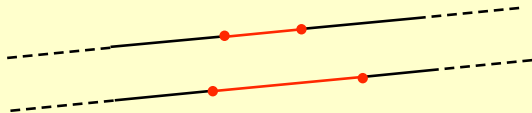
ἑτερόμηκες rettangolo, cioè con diverse misure,
ma è un ἄπαξ, poi usa la parola ὀρθογώνιον

τραπέζιον quadrilatero *qualunque* (lett. piccola mensa).

La ventitreesima definizione

κγ'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

23. Sono rette **parallele**, quelle che essendo nello stesso piano e **prolungate all'infinito** da entrambe le parti, da nessuna delle due parti **si incontrano** tra loro.



Per vedere se due rette sono
parallele occorre prolungarle.

Ma è possibile farlo?

I postulati

Αιτήματα

Il verbo **αἰτέω** significa “domando, richiedo”
In geometria viene tradotto con “postulo”.

Euclide enuncia cinque postulati:

Primo postulato

α'. **Ἡτήσθω** ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον
εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

1. **Risulti postulato, richiesto** che si possa condurre una retta da un qualunque punto a un qualunque punto.



Ἡτήσθω (perfetto imperativo del verbo **αἰτέω**) regge tutti i 5 postulati.

Secondo, terzo e quarto postulato

β'. Καί πεπερασμένην εὐθεΐαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

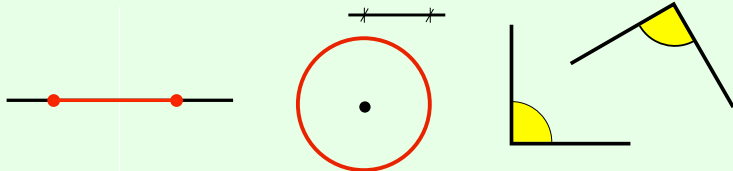
2. e [risulti postulato] che si possa prolungare una retta finita in una retta [infinita] **in modo continuo**.

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

3. e che si possa tracciare un cerchio con qualunque centro e raggio.

ε'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

4. e che tutti gli angoli retti siano uguali.

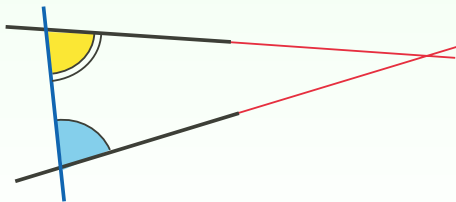


Il quinto postulato

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Traduzione libera

Se **una retta** interseca **altre due altre rette** e forma **angoli** interni dalla stessa parte che siano **minori di due angoli retti**, allora **le due rette**, prolungate all'infinito **si incontrano** dalla parte di questi due angoli.



Osservazioni sul quinto postulato

- ▶ Enunciato di Playfair (1795):

Da un punto esterno a una retta è possibile condurre un'unica retta parallela.

- ▶ Molte altre formulazioni equivalenti, ma usano concetti sviluppati più avanti e **non sappiamo** ancora **se effettivamente esistono rette parallele**.

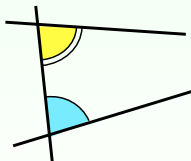
- ▶ Invece Euclide vuole introdurlo ora.

- ▶ Euclide non adopera immediatamente questo postulato.

- ▶ Euclide non dice che le due rette devono essere sullo stesso piano. (**dimenticanza?**)

- ▶ Euclide dice **minori di due angoli retti** non **somma minore di un angolo piatto**.

- ▶ Euclide non dice mai **somma di angoli** e ignora **l'angolo piatto**.



Le nozioni comuni

Ce ne sono **cinque**

Κοινὰ ἔννοιαι

α'. Τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

1. Cose uguali a un'altra sono uguali tra loro

ε'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστίν].

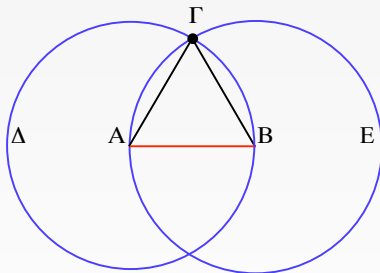
5. E il tutto è più grande della parte



Proposizione 1

α'. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Su una data retta terminata, si collochi un triangolo equilatero.



Ma chi ci assicura che le due circonferenze si incontrino in Γ ?

Può essere considerato una specie di ulteriore postulato

Il finale della proposizione:

ἴσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον,
καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας
πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ἄρα perciò

ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ciò che bisognava fare.

come dovevasi fare

Questa frase ricorre dopo ogni proposizione che sia una costruzione geometrica.

Proposizione 4: “Primo criterio di eguaglianza dei triangoli”

Ἐάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῆ γωνία ἴσην ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ, τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρα ἐκατέρα, ὕψ' ὅς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

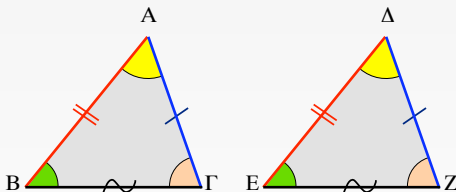
Se

$$AB = \Delta E$$

$$A\Gamma = \Delta Z$$

$$\angle B = \angle E$$

i triangoli sono
congruenti.

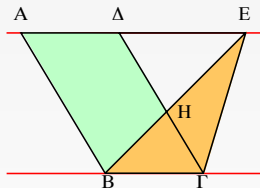
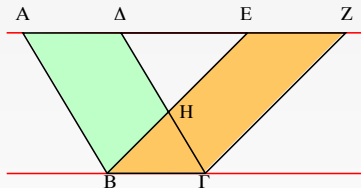


La tesi di Euclide:

- ▶ le basi sono uguali
- ▶ i triangoli sono uguali
- ▶ gli angoli alla base adiacenti ai lati uguali sono uguali a ciascuno degli angoli corrispondenti.

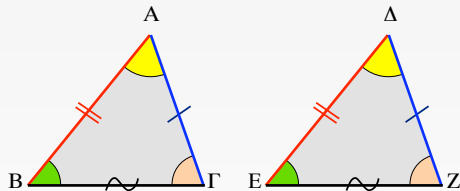
L'aggettivo ἴσος

Per Euclide ἴσος significa **equivalente** e non **congruente**.
Per esempio, nella proposizioni **35** e **41**



L'aggettivo ἴσος

Per Euclide ἴσος significa **equivalente** e non **congruente**.
Nella proposizione 4 ci sono 7 elementi equivalenti (**ἴσοι**)



Questo primo “teorema” termina con

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

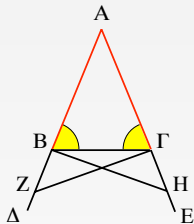
ciò che bisognava dimostrare. **come dovevasi dimostrare**

Questa frase ricorre dopo ogni proposizione che sia un teorema.

Proposizione 5:

Se il triangolo è isoscele, gli angoli alla base sono uguali.

(*Pons asinorum*)



Proposizione 6:

Se gli angoli alla base sono uguali, il triangolo è isoscele.

Teorema inverso
(ἀντίστροφος)

Cosa è la dimostrazione per assurdo ?

Regola di logica (modus tollens)

Sono logicamente equivalenti:

Se \mathcal{P} , allora \mathcal{T}

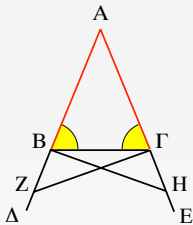
Se *non* \mathcal{T} , allora *non* \mathcal{P}

Nella pur celebrata logica aristotelica, non esiste questo concetto basilare, che però è chiarissimo in Euclide e verrà riscoperto dalla logica medievale.

Proposizione 5:

Se il triangolo è isoscele, gli angoli alla base sono uguali.

(*Pons asinorum*)



Proposizione 6:

Se gli angoli alla base sono uguali, il triangolo è isoscele.

Teorema inverso
(ἀντίστροφος)

Cosa è la dimostrazione per assurdo ?

Regola di logica (modus tollens)

Sono logicamente equivalenti:

Se \mathcal{P} , allora \mathcal{T}

Se *non* \mathcal{T} , allora *non* \mathcal{P}

Non diciamo “Se \mathcal{T} fosse falsa”, diciamo “Se \mathcal{T} è falsa”

Così fa Euclide:

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ AB τῆι ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν.

Se infatti AB è diversa da ΑΓ, una delle due è più grande.

E termina con ὅπερ ἄτοπον.

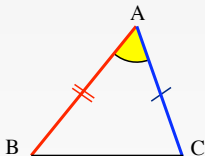
ciò è assurdo;

ciò è fuori luogo;

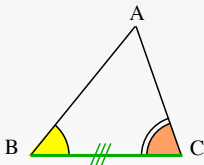
Curiosità: i tre criteri di eguaglianza

Nei testi di geometria correnti

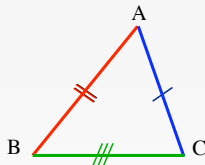
Primo criterio
(LAL)



Secondo criterio
(ALA)

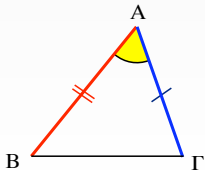


Terzo criterio
(LLL)

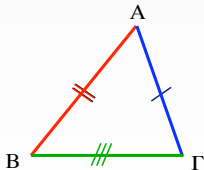


In Euclide

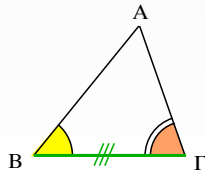
Primo criterio
(LAL)



Secondo criterio
(LLL)



Terzo criterio
(ALA)



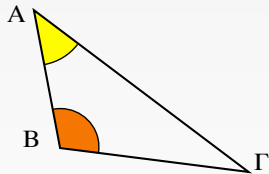
La proposizione 17

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντῃ **μεταλαμβανόμεναι**.

Per ogni triangolo, due angoli **presi insieme** sono meno di due angoli retti

In modo più chiaro:

La somma di due angoli interni di un triangolo è inferiore a un angolo piatto.



Euclide dimostrerà nella prop.32 che

La somma dei tre angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

O cara piotta mia, che s'è t'insusi,
Che come veggion le terrene menti
Non capere in triangol due ottusi,
(Par. XVII, 13-18)

Perché Euclide enuncia un teorema “debole”, se poi dimostrerà la versione “forte”?

Le proposizioni 17 e 32

Proposizione 17

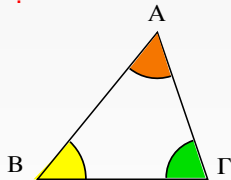
La somma di due angoli interni di un triangolo è inferiore a un angolo piatto.

Proposizione 32

La somma dei tre angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Perché Euclide enuncia un teorema “debole”, se poi dimostrerà la versione “forte”?

- ▶ Per dimostrare la **proposizione 17 non occorre** il quinto postulato
- ▶ Per dimostrare la **proposizione 32 occorre** il quinto postulato



Euclide **non userà mai** la proposizione 17

Ma vuole far vedere fino a che punto si può arrivare senza usare il quinto postulato.

Le prime 28 proposizioni

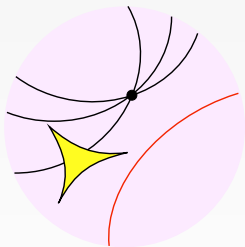
Le prime 28 proposizioni del Libro 1

non usano il quinto postulato.

Euclide non lo usa fintantoché non gli è indispensabile.

Nella **geometria iperbolica** (geometria non-euclidea del XIX secolo)

- ▶ **Non vale** il quinto postulato
 - ▶ Da un punto esterno si possono condurre **infinite rette parallele**
 - ▶ La somma degli angoli interni di un triangolo è **meno di 180^0**
-



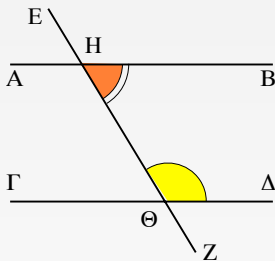
Ma fino alla proposizione 28

Euclide è un geometra non-euclideo

Le proposizioni 28 e 29

Proposizione 28 :

Se due rette sono tagliate da una trasversale e la somma degli angoli interni è pari a due retti, le due rette sono parallele.



Ora Euclide vuol dimostrare il viceversa (ἀντίστροφος)

Proposizione 29 :

Se due rette sono parallele e sono tagliate da una trasversale, allora la somma degli angoli interni è pari a due retti.

ma per questo è indispensabile il quinto postulato

E senza questa proposizione e le successive non si potrà dimostrare il teorema di Pitagora

La proposizione 47

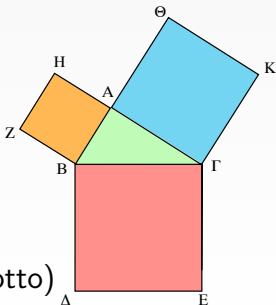
Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Letteralmente:

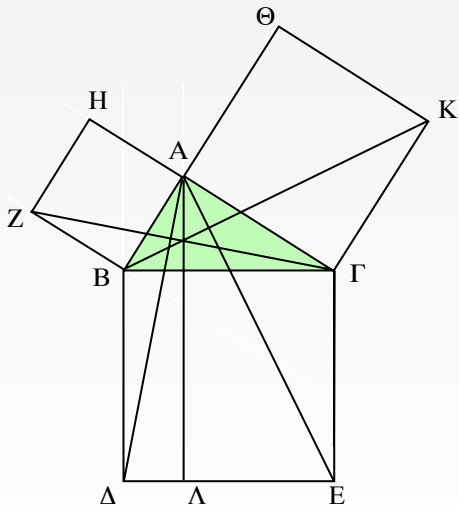
Nei triangoli rettangoli, il quadrato sul lato teso sotto l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che circondano l'angolo retto.

È universalmente nota come
Teorema di Pitagora.

Euclide non usa qui la parola cateto (ma κάθετος εὐθεία = retta ortogonale) però usa ipotenusa (ὑποτείνουσα, tesa sotto)

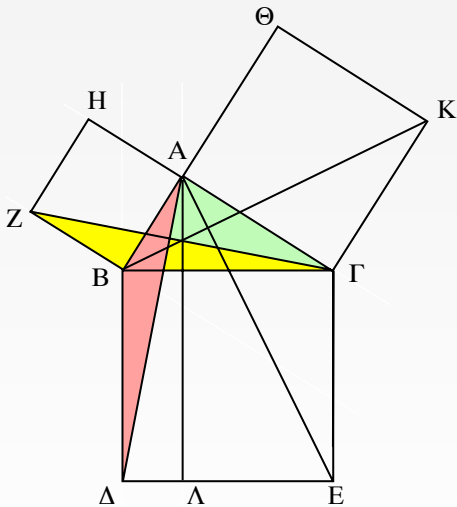


La dimostrazione originale di Euclide



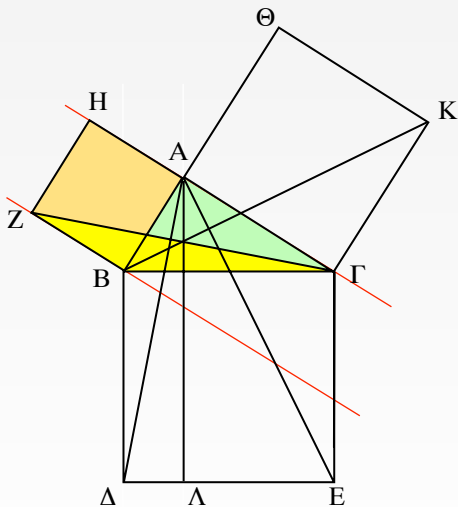
mulino a vento sedia della sposa coda di pavone

La dimostrazione originale di Euclide



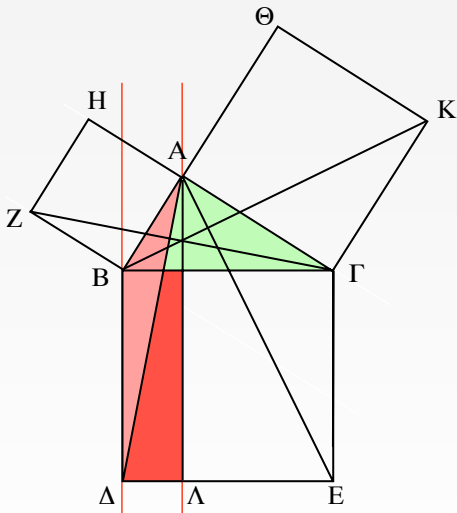
I triangoli sono uguali
(primo criterio di eguaglianza)

La dimostrazione originale di Euclide



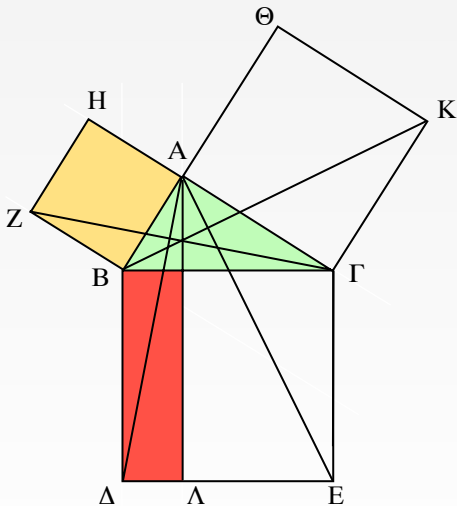
Il triangolo è metà del parallelogramma
(**proposizione 41**)

La dimostrazione originale di Euclide



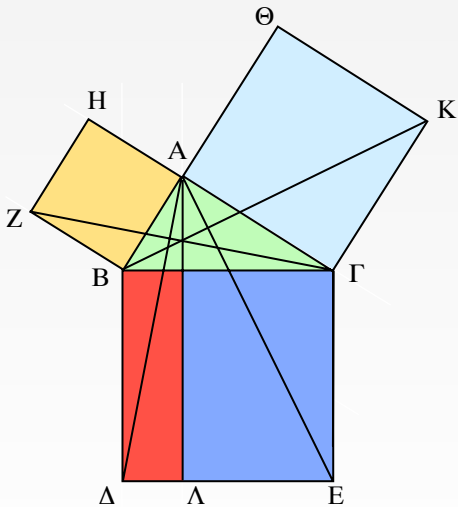
Il triangolo è metà del parallelogramma
(**proposizione 41**)

La dimostrazione originale di Euclide



I parallelogrammi sono uguali per la transitività
detto comunemente **primo teorema di Euclide**

La dimostrazione originale di Euclide



Stesso ragionamento per l'altro cateto
e si conclude

Alcune curiosità tratte dai Libri successivi

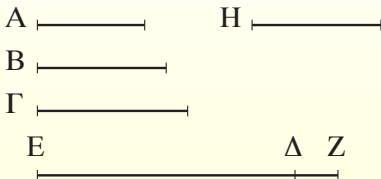
- ▶ Nel secondo, sesto e tredicesimo Libro la **sezione aurea**.
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Dividere una data retta terminata in **estrema** e **media** ragione.

- ▶ Nel quinto Libro si definisce la **proporzione** (**ἀναλογία**).
- ▶ La definizione di **quattro grandezze in proporzione** è molto complicata e fu criticata come inutilmente pedante da molti, tra cui Galileo.
- ▶ Solo nella seconda metà del XIX secolo si riconobbe che Euclide aveva anticipato di 22 secoli **la definizione di numero reale**.

Alcune curiosità tratte dai Libri successivi

- ▶ Nel settimo ottavo e nono Libro, Euclide tratta i **numeri** che però sono visti come grandezze.

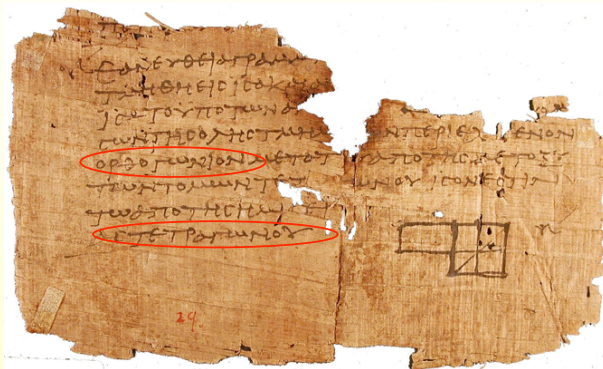


e dà le definizioni di

- ▶ Numero primo : **πρῶτος ἀριθμός**
- ▶ Massimo Comun Divisore : **τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον**
- ▶ Nel decimo definisce le **grandezze incommensurabili**: **ἀσύμμετρα μεγέθη**

Un papiro trovato a Ossirinco

che contiene una proposizione del Libro 2



ὀρθογώνιον e τετράγωνον

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Non esiste una via regia alla Geometria, ma quella che troviamo nei libri attuali è sicuramente più agevole.