Euclide, questo sconosciuto

Francesco Odetti
Università di Genova
2017

1.1 Introduzione

Gli Elementi di Euclide sono un'opera del III secolo a.C. che espone in maniera rigorosa e sistematica i principi di geometria del piano e dello spazio, la teoria delle proporzioni e l'aritmetica dei numeri, concludendo con i cinque poliedri regolari.
Gli Elementi vengono comunemente considerati (dopo la Bibbia) il libro che ha avuto più edizioni al mondo, considerando sia l'originale, che le versioni e gli adattamenti.
Ciononostante la versione originale (non quella adattata per ragioni scolastiche) è piuttosto sconosciuta e di scarsa diffusione, sia in traduzione che in originale greco.
Pur essendo un docente di Geometria, non avevo mai avuto occasione di esaminare gli Elementi in originale e così penso sia successo alla stragrande maggioranza dei miei colleghi matematici.
Mi è capitata per caso in mano una buona traduzione ben commentata che ho letto con somma curiosità e a quel punto, approfittando del mio passato di studente di Liceo Classico mi sono procurato la versione originale in greco che, con un po' di difficoltà e aiutandomi con la traduzione ho potuto (fino a un certo punto) gustare.
Molte sono state le sorprese e ho dovuto ricredermi sulle molte leggende e sui luoghi comuni che avvolgono quest'opera di cui tutti hanno in infarinatura per aver studiato qualche teorema a scuola, ma che in realtà quasi tutti ignorano (e molti non sanno neanche che esista).
L'oblio generale di quest'opera è anche qualcosa di impressionante. Il celebre dizionario Rocci, nell'elenco iniziale degli autori pone anche Euclide e riporta sicuramente tutti i termini geometrici, ma, per quanto ho potuto constatare, Euclide non viene quasi mai citato in nessuna delle voci prettamente geometriche,

al massimo viene detto che si tratta di un termine usato dai matematici. E manca persino la parola che Euclide usa per indicare il punto. Penso che quasi nessun studente di lettere classiche greche all'Università abbia avuto occasione di leggere l'originale di questa opera. In nessun libro scolastico, per quanto mi consta, è riportato, neanche per curiosità, un passo originale di Euclide (né di altri matematici greci e non sono pochi).
Eppure fino alla metà del XIX secolo è stata l'opera più stampata al mondo (sempre dopo la Bibbia).
Il mio scopo è quindi quello di ridare dignità a un'opera, che pur non potendo essere considerata letteraria nel senso normale del termine, ha tuttavia avuto un'enorme influenza sulla cultura e sulla scienza per più di 2000 anni.

1.2 Chi era Euclide

Su Euclide non si sa praticamente niente. Abbiamo persino pochissime informazioni sul periodo in cui visse e lavorò.
Un primo indizio cronologico ce lo dà il matematico Pappo circa sei secoli dopo: dice che Apollonio (altro famosissimo matematico) trascorse molto tempo ad Alessandria con gli scolari di Euclide.
Di Apollonio si sa un po' di più: nacque nel 262 a.C. e morì nel 190 a.C. Quindi Euclide visse in un periodo precedente.
Proclo, filosofo del 5 secolo d.C., è una delle maggiori fonti su Euclide, avendo scritto un "Commento all'opera di Euclide". Certamente ebbe modo di consultare opere disponibili alla sua epoca, ma ormai perdute, e dice solo che Euclide attinse molto dai suoi predecessori. In particolare prese molto da Talete, colui che secondo Erodoto imparò la matematica dagli Egizi, e dal sommo Pitagora.
Dice inoltre che era non molto più giovane di alcuni dei discepoli di Platone (morto nel 347 a.C.)
Aristotele (morto nel 322 a.C.), di cui ci sono giunti molti scritti, ignora Euclide, mentre Archimede (nato circa nel 284 a.C.) lo cita.
Quindi si può arguire che visse a cavallo tra il quarto e terzo secolo a.C. e di solito si dà il 300 a.C. come data più probabile della redazione degli Elementi.
Molti in passato lo confusero con Euclide di Megara, un filosofo vissuto intorno al 400 a.C., ma per evidenti motivi cronologici non può essere stato lui.

1.3 È esistito veramente Euclide ?

È un po' come la famosa questione omerica. Si sa talmente poco di lui che qualcuno dubita persino che sia esistito.
A tal proposito ricordiamo che esiste un'opera matematica colossale: "Éléments de mathématique" in più di venti volumi, pubblicata in Francia tra il 1935 e il 1968 (con qualche ulteriore volume successivo) firmata da Nicolas Bourbaki. Non è mai esistito un matematico con questo nome; si tratta di un pool di matematici, una specie di società segreta, che si sono proposti di scrivere un'opera fondamentale sulla matematica, nella quale non fosse possibile individuare i contributi dei singoli autori e neppure chi fossero gli autori stessi e hanno perciò usato uno pseudonimo.
Anche gli Elementi di Euclide potrebbero essere stati il frutto del lavoro di svariate persone e quindi Euclide potrebbe essere stato uno pseudonimo oppure il coordinatore del progetto. Comunque è solo un'ipotesi non suffragata da alcun indizio.

Comunque non ci sono pervenuti trattati di geometria anteriori agli Elementi di Euclide. Ci sono solo giunti alcuni nomi di studiosi: Talete e Pitagora sui quali abbiamo più leggende che dati certi, e poi Teeteto, Ippocrate di Chio e Eudosso da Cnido, ma non è chiaro quali contributi abbiano dato queste persone alla Geometria né quali opere abbiano scritto.
Per quanto riguarda la persona di Euclide infatti si hanno solo due aneddoti, uno riferito da Proclo e uno da Stobeo (contemporaneo di Proclo).
Il primo dice che, avendo il re Tolomeo avuto desiderio di studiare la geometria e avendo chiesto a Euclide se vi fosse un modo più semplice di quello di leggere gli Elementi, ebbe come risposta: "Non esistono vie regie alla Geometria"
Il secondo dice che, avendo uno scolaro chiesto a Euclide che ricavo avrebbe avuto dallo studio della Geometria, Euclide chiamò un suo servo e fece dare allo studente una monetina cacciandolo via dalla scuola.
Gli aneddoti danno comunque un'idea del valore annesso dagli antichi Greci allo studio della Geometria.

1.4 Dove furono scritti gli Elementi ?

Anche se le fonti sono appunto scarsissime, è quasi certo che gli Elementi furono scritti in Alessandria d'Egitto.
Alessandria fu fondata intorno al 332 da Alessandro Magno che voleva una grande città col suo nome. Pare che l'architetto Dinocrate volesse modellare il monte Athos in Grecia come una gigantesca statua di Alessandro che tenesse in una mano un lago e nell'altra una vera città, ma ovviamente il progetto era troppo im-

ponente e l'ubicazione non felice. Alessandro quindi affidò a Dinocrate il compito di disegnare Alessandria su una lingua di sabbia presso il delta del Nilo davanti all'isoletta di Faro.
Alessandria divenne ben presto una città enorme. Aveva due strade principali larghe 30 metri che si intersecavano ad angolo retto con portici illuminati tutta la notte, un canale di più di 20 km che portava l'acqua dal Nilo, con impianti di potabilizzazione, due porti separati da una diga artificiale di 7 stadi (circa 1.2 km) che collegava la città con l'isola di Faro, parchi pubblici, teatri, palestre, ippodromi. Gli edifici più notevoli erano il Ginnasio (una via di mezzo tra scuola, Università, centro sportivo e sociale) e la celebre Biblioteca. Il Serapeion era un edificio dedicato al dio Serapis, il dio che fu inventato di sana pianta dal re Tolomeo I Soter, ed era allo stesso tempo un tempio e un centro culturale. La popolazione cosmopolita di Alessandria era formata da Egiziani, Greci, Ebrei e molte altre etnie e vi erano templi per tutte le religioni praticate.
Nel 280 a.C. venne costruita nell'isola di Faro la celebre lanterna, settima meraviglia del mondo, che prese il nome dell'isoletta. Il Faro era alto 95 metri, ma la vera meraviglia erano gli impianti tecnologici che per mezzo di specchi probabilmente parabolici permettevano al raggio rotante di luce di raggiungere la distanza di 300 stadi (50 km) cioè il limite dell'orizzonte.
Alessandria era senza dubbio la città più grande e moderna del mondo antico, nel momento in cui Roma era ancora un grosso villaggio semi-barbaro alle prese coi Sanniti e le città della Grecia continentale erano in decadenza. E quando Roma divenne Roma, Alessandria rimase comunque la seconda città dell'Impero.
Nel periodo aureo di Alessandria, intorno al terzo secolo, la cultura e le scienze ebbero uno sviluppo tumultuoso. La meccanica, l'astronomia e la medicina fecero passi da gigante, poi purtroppo in buona parte caduti nell'oblio; ebbe inizio persino la psicanalisi. Nacque la grammatica: le sistemazioni grammaticali che conosciamo: casi, tempi, modi, parti del discorso furono fissate ad Alessandria. Nacque la filologia: la divisione di Iliade e Odissea in 24 canti risale a quei tempi e fu effettuata anche la prima traduzione in greco della Bibbia. E per quanto ci interessa, nacque la logica proposizionale, evoluzione della rudimentale logica aristotelica ed ebbe sicuramente grande sviluppo la matematica. Lavorarono ad Alessandria autentici geni quali Eratostene, Ctesibio, Erofilo e in parte Archimede. È quindi quasi certo che qui nacquero gli Elementi di Euclide.
Purtroppo buona parte della scienza alessandrina è andata persa per varie vicende storiche e in molti casi sono cadute nel dimenticatoio per millenni scoperte scientifiche di enorme portata.
Una felice eccezione è costituita pertanto dagli Elementi di Euclide sopravvissuti

alla rovina, non quanto il loro autore di cui si conosce solo il nome.

1.5 Come ci sono pervenuti gli Elementi ?

Gli Elementi ebbero sicuramente grande diffusione nel mondo greco ellenistico. I Romani invece non amarono Euclide: troppo astratto e quasi privo di applicazioni pratiche. La prima traduzione in latino di cui ci sia giunta notizia certa è addiritura quella di Boezio nel V secolo d.C., anche se è possibile che ce ne siano state altre di cui non ci è giunta notizia.
Gli Elementi invece furono assai apprezzati dagli Arabi. La conquista araba dell'Egitto purtroppo ebbe tra le conseguenze la distruzione finale della Biblioteca di Alessandria, comunque già allora assai in cattive condizioni. Pare che invece in Siria il contatto tra il mondo greco e quello arabo sia stato assai più proficuo e gli arabi assimilarono rapidamente gran parte della cultura greca e tradussero nella loro lingua molte opere tra cui naturalmente gli Elementi di Euclide.
Nel Medioevo circolavano soprattutto versioni arabe degli Elementi e nel mondo occidentale gli Elementi furono conosciuti soprattutto attraverso quel canale.
Intorno al 1255 Giovanni Campano da Novara pubblicò un'edizione latina degli Elementi di Euclide tradotti dall'arabo. Il testo fu utilizzato per più di due secoli ed è possibile che anche Dante abbia avuto occasione di leggerli.
Il primo libro stampato al mondo contenente figure geometriche fu appunto a Venezia nel 1482 "Preclarissimus liber elementorum Euclidis", la traduzione del Campano.
Comunque, da quel momento in poi, le edizioni a stampa degli Elementi si susseguirono a ritmo impressionante basate sia su originali greci (i più antichi manoscritti che ci sono pervenuti risalgono al IX secolo) sia su versioni arabe e gli Elementi divennero presto il libro più stampato al mondo (dopo la Bibbia).

1.6 Come sono strutturati gli Elementi ?

Il nome originale degli Elementi è Στοιχεῖα.
L'appellativo che spesso gli antichi attribuivano a Euclide è infatti Στοιχειωτής.
Osserviamo che la parola στοιχεῖα viene usata anche dai filosofi platonici per indicare i quattro elementi fondamentali del cosmo: acqua, aria, terra, fuoco. Quindi anche Euclide la usa per indicare qualcosa di basilare.

Gli Στοιχεῖα sono 13. Normalmente ci si riferisce a ciascuno di essi chiamandolo "Libro", anche se la traduzione letterale sarebbe "Elemento".

Il piano generale dell'opera è il seguente:

- 1 : geometria del piano; dalle definizioni elementari al celebre teorema detto di Pitagora
- $2, 3, 4$: geometria del piano; i poligoni, la circonferenza, i poligoni regolari
- 5 : teoria delle proporzioni
- 6 : applicazione delle proporzioni alla geometria del piano: le similitudini
- $7, 8, 9$: teoria dei numeri : numeri primi, scomposizione in fattori, massimo comun divisore, numeri perfetti.
- 10 : le grandezze incommensurabili (il più vasto e difficile)
- $11, 12$: geometria dello spazio: parallelepipedi, prismi, piramidi, coni, sfere.
- 13 : i poliedri regolari e i solidi platonici.

Ogni Libro è diviso in varie proposizioni che possono essere teoremi o costruzioni, ognuna delle quali ha un numero. Non c'è nome greco per le proposizioni, solo un numero, sia che si tratti appunto di un teorema o proposizione, sia che si tratti di una costruzione. E probabilmente la numerazione che ci è giunta non è quella originale.
Euclide non distingue all'inizio di ogni proposizione tra teorema e costruzione, ma, come vedremo, lo fa alla fine.
Sono invece privi di numero sia un lemma (λῆμμα) che un corollario (πόρισμα).
La stessa parola teorema non viene mai usata (forse una volta nell'ottavo libro riferendosi a un'affermazione precedente). Quasi ogni Libro ha all'inizio delle definizioni (ὅροι). Solo il primo ha un'introduzione più articolata, che ora descriveremo.

1.7 Il primo Libro: le prime definizioni

Ci limitiamo quasi esclusivamente a una descrizione del primo στοιχεῖον sia per motivi di spazio, sia perché è il più famoso e il più interessante, anche se la ricchezza di Euclide meriterebbe un migliore approfondimento.

Questo è l'inizio che merita di essere letto in originale anche perché la traduzione presenta diversi problemi.

Ὅροι

αʹ. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
βʹ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
γʹ. Γραμμῆς δὲ πὲρατα σημεῖα.
δʹ. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

La parola ὅρος significa confine, termine. Viene infatti tradotta di solito con definizione. E infatti anche il latino finis significa confine, termine, cioè qualcosa che delimita l'ambito di quella parola.

La prima definizione è

α.ʹ Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

e viene di solito tradotta con

1. Il punto è ciò che non ha parti

Letteralmente

Punto è, [ciò che] non [ha] nessuna parte

Il termine usato da Euclide per indicare un punto è σημεῖον, che più propriamente significa segno (cfr. semantica, semaforo etc.).
I predecessori di Euclide usavano per lo stesso concetto la parola στιγμή che significa punto.
Per capire bene la differenza conviene citare un passo del filosofo scettico Sesto Empirico (II secolo d.C.) che nell'opera Πρὸς μαθηματικούς (Contro i matematici) dice che i matematici affermano:

στιγμὴν μὲν εἶναι σημεῖον ἀμερὲς καὶ ἀδιὰστατον

essere il punto un segno senza parti e senza estensione

Quindi il punto per Euclide è qualcosa di diverso da quello che intendevano i suoi predecessori, di conseguenza usa una parola diversa.
Diversi critici moderni pensano che diversi ὅροι euclidei siano apocrifi, interpolazioni dei secoli successivi. Ed effettivamente viene l'impressione che forse Euclide, nell'usare una parola nuova, abbia implicitamente messo in evidenza la totale astrattezza del concetto di punto che diventava un semplice segno. Quindi è possibile che l'uso stesso della parola σημεῖον al posto di στιγμή rendesse inutile questa definizione.

Anche la seconda definizione merita un commento:

βʹ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές

2. E linea è una lunghezza senza larghezza

La parola γραμμή indica una linea non necessariamente retta e, come vedremo ora, non infinita. Anche questa definizione potrebbe essere apocrifa per gli stessi motivi. Euclide è puramente astratto. Non vuole collegare i suoi concetti a oggetti del mondo concreto, quindi forse questa definizione è tutto sommato superflua e possibilmente interpolazione successiva.

La terza chiarisce che una linea non è infinita:

γ′. Γραμμῆς δὲ πὲρατα σημεῖα

3. E gli estremi di una linea sono punti

La quarta è in assoluto una delle più ermetiche e discusse definizioni euclidee.

δ′. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ′ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

La traduzione usuale, abbastanza letterale, è

4. La linea retta (εὐθεῖα γραμμή) è quella che giace allo stesso modo (ἐξ ἴσου) rispetto ai suoi punti.

La frase è di per sé misteriosa e il sospetto di un'interpolazione posteriore qui è grande. Teniamo presente che, forse anche una circonferenza "giace allo stesso modo rispetto ai suoi punti" e quindi anche questa definizione, ammesso che sia di Euclide, lascia un po' il tempo che trova.

Comunque la definizione introduce il termine εὐθεῖα γραμμή, linea retta, che in seguito viene semplicemente detta εὐθεῖα con ellissi del sostantivo.

E ricordiamo che con il termine retta (εὐθεῖα) si intende sempre una retta terminata (πεπερασμένη, aggiunge Euclide diverse volte) ovvero quello che noi chiamiamo segmento.
Quindi la retta è finita e solo potenzialmente infinita come chiarirà Euclide nei postulati.

1.8 Il primo Libro: le definizioni successive

Gli ὅροι del primo στοιχεῖον sono 23 (da α′ a κγ′ secondo il sistema numerale greco). Riportiamo i più interessanti:

ε′. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
5. Superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza.

Ricorda un po' la definizione di linea e introduce la parola ἐπιφάνεια, superficie.

ζʹ. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Ricorda la quarta e si può tradurre

> 7. Il piano è una superficie che giace allo stesso modo (ἐξ ἴσου) rispetto alle sue rette.

E introduce la parola ἐπίπεδος, piano.

Segue la definizione di angolo γωνία ed è interessante notare che l'angolo è l'inclinazione di due linee (δύο γραμμῶν κλίσις) non necessariamente rette, per cui viene poi introdotto l'angolo rettilineo (εὐθύγραμμος γωνία) che è il nostro angolo usuale. Ciononostante Euclide non usa mai in seguito la nozione di angolo curvilineo.

Quindi si definiscono
La retta perpendicolare: κάθετος εὐθεῖα. La parola cateto significa cadente (ortogonalmente). È la retta che forma due angoli uguali ognuno dei quali è detto angolo retto: ὀρθεῖα γωνία.

L'angolo ottuso ἀμβλεῖα γωνία

> ιαʹ. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστιν ἡ μείζων ὀρθῆς.
> 11. L'angolo ottuso è quello maggiore del retto

L'angolo acuto ὀξεῖα γωνία.

> ιβʹ. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.
> 12. E l'angolo acuto è quello minore del retto.

Seguono altre definizioni tra cui quelle di cerchio (κύκλον), centro (κέντρον) e circonferenza (περιφερεία).
È interessante notare che Euclide non ha una parola per indicare il raggio di una circonferenza e usa delle locuzioni. A questo proposito ricordiamo che attualmente in geometria la parola raggio ha due significati:

- La distanza tra il centro e un punto della circonferenza. È quella che Euclide chiama genericamente διάστημα, cioè distanza.
- Un segmento che abbia come estremi il centro e un punto della circonferenza. Per questo Euclide usa genericamente l'espressione ἡ ἐκ τοῦ κέντρου: la [retta] dal centro.

In compenso ἡ διάμετρος (sottinteso γραμμή) indica il segmento che unisce due punti della circonferenza passando per il centro.
Il lato è detto ἡ πλευρά.

È poi definito triangolo (τρίγωνόν) come figura trilaterale (τριπλεύρον σχημάτον). IL triangolo equilatero (ἰσόπλευρον), quello isoscele (ἰσοσκελές) (letteralmente con le stesse gambe) e quello scaleno (σκαληνόν) (parola forse derivata da σκάζειν zoppicare).

Infine i quadrati e rettangoli. Il rettangolo è detto in strano modo ἑτερόμηκες, cioè con diverse misure, non intendendo quindi che il quadrato sia un rettangolo particolare. Questo termine è però un ἅπαξ, cioè comapre solo qui; Euclide nel seguito usa la parola ὀρθογώνιον. Forse anche questa definizione è un interpolazione successiva, dato che Aristotele usa ἑτερόμηκες come contrario di quadrato (τετράγωνον).
Con τραπέζιον (letteralmente piccola mensa) si indica un quadrilatero qualunque (anche se non ha due lati paralleli). Anche questo termine è poco usato da Euclide.

La definizione più interessante è l'ultima

> κγ΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη επὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Traduzione letterale:

> 23. Sono rette parallele, quelle che essendo nello stesso piano e prolungate (ἐκβαλλόμεναι) all'infinito (εἰς ἄπειρον) da entrambe le parti, da nessuna delle due parti si incontrano (συμπίπτουσιν) tra loro.

Quello delle rette parallele è, come vediamo uno dei punti cruciali del primo Libro di Euclide e quindi vale la pena di notare che nella definizione originale, diversamente da quanto accade nei testi attuali, esiste il concetto di **prolungamento da entrambe le parti**, visto che in realtà le rette euclidee sono segmenti.

Si pone quindi la domanda: è possibile prolungare i segmenti da entrambe le parti? Ed è quello cui Euclide risponde nella sezione successiva del primo Libro.

1.9 Il primo Libro: i primi quattro postulati

Il verbo αἰτέω significa "domando, richiedo", ma in geometria viene comunemente tradotto con "postulo". Dopo gli ὅροι, quindi nel primo Libro seguono gli αἰτήματα, i postulati, che sono cinque:

> α΄. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Il primo postulato inizia con la parola Ἠιτήσθω che vale per tutti i cinque postulati. È il perfetto imperativo del verbo αἰτέω e si potrebbe tradurre:

“Risulti postulato, richiesto”. Quindi i postulati sono delle vere e proprie richieste senza le quali non si può procedere. In questo senso Euclide è più moderno di quanto si supponga comunemente. Sta creando un vero e proprio sistema ipotetico-deduttivo.

Il primo postulato richiede che si possa condurre una retta da un qualunque punto a un qualunque punto.

Seguono gli altri

> β′. Καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ′ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
> γ′. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
> ε′. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

In pratica:

2. e che si possa prolungare una retta finita in una retta [infinita] senza interruzione (τὸ συνεχὲς).
3. e che si possa tracciare un cerchio con qualunque centro e raggio.
4. e che tutti gli angoli retti siano uguali.

In qualche modo i primi tre postulati ci danno un’idea del fatto che la geometria euclidea è la geometria della riga e del compasso, anche se Euclide non cita mai questi strumenti, per lui troppo concreti.

Per quanto riguarda il quarto, è a prima vista assai curioso che, dopo aver definito angolo retto quello formato da due rette che intersecandosi formino angoli uguali, poi Euclide voglia postulare che tutti gli angoli retti sono uguali.
In realtà vuole che tutti gli angoli retti, anche formati da altre rette lo siano.

I primi quattro sono i postulati che Euclide usa ripetutamente nelle prime proposizioni.

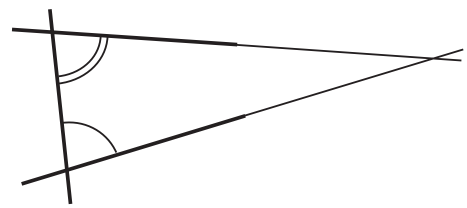
1.10 Il primo Libro: il quinto postulato

Il più misterioso è il celebre quinto postulato la cui forma lascia notevolmente perplessi, anche perché nei libri scolastici è normalmente riportato in forma assai differente.

> ε′. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ′ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ′ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

La traduzione libera, può essere:

> Se una retta interseca due altre rette e forma angoli interni dalla stessa parte che siano minori di due angoli retti, allora le altre due rette, prolungate all'infinito si incontrano sul lato della prima retta nel quale gli angoli interni sono minori di due angoli retti.



Effettivamente sembra evidente che se la somma dei due angoli è inferiore a due retti, le rette si debbano incontrare e formare un triangolo. Ma Euclide non è in grado di dimostrarlo e lo richiede per la sua trattazione. Questo stranissimo postulato di natura completamente diversa dai precedenti ha dato origine a infinite discussioni per più di 2000 anni. È stato più volte aspramente criticato e su di esso esiste una letteratura vastissima. D'Alembert lo considerava addiritura la croce e lo scandalo della geometria.
Vediamo alcune osservazioni tra le più interessanti e inusuali.

- Usualmente il postulato viene riportato in una forma (quasi) equivalente, ma decisamente più intuitiva (il cosiddetto enunciato di Playfair, matematico scozzese del XVIII secolo):

  Da un punto esterno a una retta è possibile condurre un'unica retta parallela.

- Esistono svariate altre formulazioni equivalenti del postulato, ma si basano tutte su nozioni che a questo punto non sono state ancora ben sviluppate quali le rette parallele e gli angoli interni di un triangolo.

- Euclide non enuncia altri postulati nei restanti Libri (anche se, come ha riconosciuto la critica, ce ne sono parecchi impliciti). Volendo quindi introdurre il postulato ora, deve farlo nel modo più primitivo; l'enunciato di Euclide è in qualche modo più coerente con l'architettura degli Elementi.

- Euclide non adopera immediatamente questo postulato, mentre fa intensivo uso degli altri quattro e vedremo che anche questo è decisamente voluto.

- Se c'è comunque una critica da fare è il fatto che Euclide non dica che le due rette devono essere sullo stesso piano. Ma questa è più una dimenticanza che un difetto insanabile.

- Euclide non usa l'espressione "somma di angoli" né qui, né altrove. Dice "minore di due angoli retti" e non "minore della somma di due angoli retti".
- Euclide dice "due angoli retti" perché non introduce mai nei suoi Elementi l'angolo piatto.

Torneremo al momento opportuno sul quinto postulato.

1.11 Il primo Libro: le nozioni comuni

Prima di entrare nel vivo, Euclide fa una serie di cinque κοιναὶ ἔννοιαι, cioè nozioni comuni, in realtà dei postulati, anche se più generici e non coinvolgenti direttamente enti geometrici. Per esempio la prima è

> αʹ. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
> 1. Cose uguali a un'altra sono uguali tra loro

ovvero la transitività dell'uguaglianza.

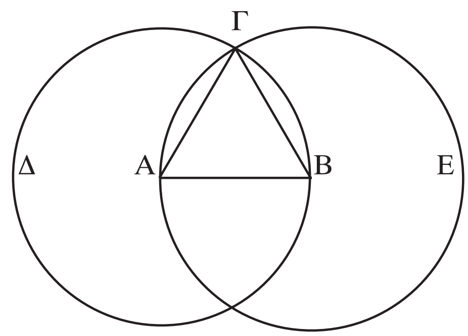
La più notevole:

> εʹ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].
> 5. E il tutto è più grande della parte

1.12 Il primo Libro: la proposizione numero 1

Finalmente iniziano gli elementi veri e propri con la prima proposizione, anche questa assai discussa nei secoli successivi.
In realtà non è un teorema, ma una costruzione:

> αʹ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.
> Su una data (δοθείση) retta terminata (πεπερασμένη), si collochi (συστήσασθαι aoristo medio) un triangolo equilatero



La costruzione è nota a tutti, ma fin dall'antichità venne fatto notare che il fatto che le due circonferenze si intersechino in Γ non risulta da nessun postulato.
La questione è abbastanza delicata e un postulato dal quale discenda questo fatto avrebbe una complessità enormemente superiore a quella del famoso quinto.
Euclide ha quindi commesso un abuso?
Forse sì e forse no. Le prime quattro proposizioni hanno tutte, anche se in maniera minore, qualche problema di questo tipo. Nel XIX secolo queste proposizioni erano fortemente criticate come grossi difetti nell'impianto euclideo. La critica moderna rivaluta Euclide e pensa che in reltà esse siano un "prolungamento" dei postulati. Ovvero quattro enunciati in qualche modo da accettare per quello che sono.

Da notare la conclusione della proposizione.

> Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Notiamo la parola ἄρα (perciò) spesso usata alla fine di una proposizione e l'ovvio uso delle lettere greche maiuscole per indicare i punti.
E soprattutto, dopo il punto in alto, la magica frase

> ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.
>
> ciò che bisognava fare "come dovevasi fare"

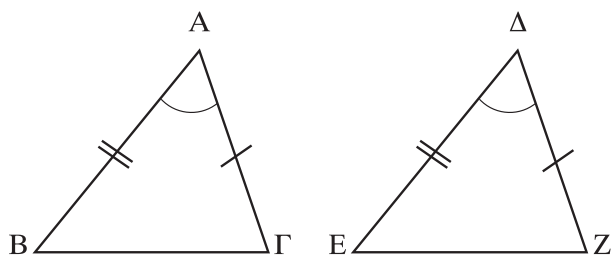
Questa frase ricorre dopo ogni proposizione che sia una costruzione geometrica.

1.13 La proposizione numero 4

La proposizione 4 è comunemente nota come "Primo criterio di eguaglianza dei triangoli" ed è il primo teorema vero e proprio.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

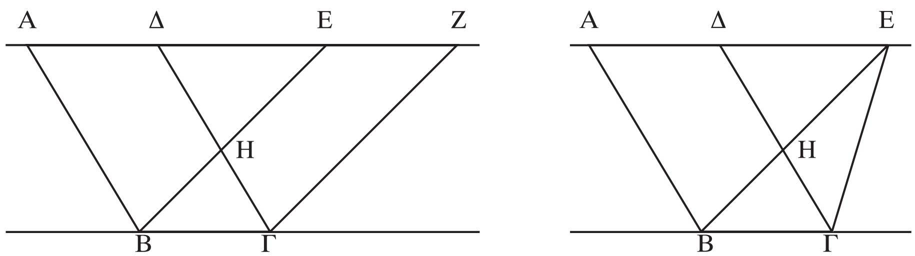
In sintesi, usando la figura (con aggiunti segni che non compaiono in originale) l'enunciato è:
Se $\mathrm{AB}=\Delta\mathrm{E}$, $\mathrm{A}\Gamma=\Delta\mathrm{Z}$ e $\mathrm{BA}\Gamma=\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z}$, allora i due triangoli sono congruenti.



Nella dimostrazione si fa uso del discutibile concetto di movimento e quindi molti la considerano, come già detto, una specie di prolungamento dei postulati.
Ma la cosa interessante è il fatto che l'enunciato originale è assai più articolato.
Euclide, in maniera apparentemente pedante, dà una tesi molto dettagliata e dice che:

le basi sono uguali (e distingue così curiosamente tra lati e base)
i triangoli sono uguali
gli angoli alla base adiacenti ai lati uguali sono uguali a ciascuno degli angoli corrispondenti.

Per capire il motivo di questa apparente sovrabbondanza occorre esaminare l'uso che Euclide fa dell'aggettivo ἴσος. La parola viene usata successivamente nel significato di equivalente invece che di uguale (congruente). Per esempio, nella proposizione 35 verrà dimostrato che parallelogrammi con la stessa base e racchiusi tra rette parallele sono uguali (ἴσα) e nella proposizione 41 che un parallelogramma ha area doppia di un triangolo con la stessa base a la stessa altezza.



Quindi Euclide con ἴσοι intende equivalenti e si sente in dovere di precisare che i due triangoli sono, non solo equivalenti come area, ma hanno anche i singoli elementi equivalenti.
Questa prima "dimostrazione" si conclude con la frase

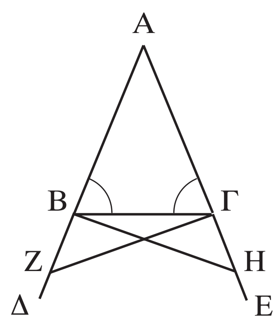
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ciò che bisognava dimostrare "come dovevasi dimostrare"

Questa frase ricorre dopo ogni proposizione che sia un teorema.

1.14 La proposizioni 5 e 6

La celebre proposizione 5 afferma che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.



La proposizione 6 è il teorema inverso (ἀντίστροφος) del precedente e afferma che se in un triangolo gli angoli alla base sono uguali, il triangolo è isoscele.

Questa è la prima proposizione in cui viene usata la cosiddetta dimostrazione per assurdo.
Esaminando il testo originale si vede che Euclide non usa il congiuntivo, ma l'indicativo presente. Non dice "Se fosse...". Dice: "Se..."

Cosa è in realtà una dimostrazione per assurdo?

È il cosiddetto "modus tollens" della logica proposizionale:

Le due frasi “P implica Q” e “non Q implica non P” sono logicamente equivalenti. La dimostrazione per assurdo consiste proprio in questo, nell’usare la frase equivalente.

Questo fatto non è ancora presente nella logica aristotelica; la prima formulazione nota di questo principio basilare di logica appare in Crisippo, che è posteriore a Euclide e l’espressione “modus tollens” risale al medioevo.

Ma Euclide ha già chiaro il principio e quindi non dice “Se fosse falso Q...”, ma usa l’indicativo presente: “Se Q è falso...”. La frase introduttiva della dimostrazione è

> Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν.
>
> Se quindi AB è diversa da ΑΓ, allora una delle due è più grande

Da questo punto di vista, Euclide è più moderno di quanto ci si possa aspettare. Alla fine della dimostrazione usa però la frase:

> ὅπερ ἄτοπον·

che viene comunemente tradotta

> ciò è assurdo;

Ma in realtà ἄτοπον vuol dire “fuori posto”, ovvero il ragionamento ci ha condotto alla negazione dell’ipotesi.

1.15 I tre criteri di eguaglianza

Nei libri di geometria vengono comunemente introdotti i tre criteri di eguaglianza dei triangoli. Il primo l’abbiamo visto poco sopra. La cosa curiosa è il fatto che in Euclide il terzo criterio (quello che dice che due triangoli sono uguali se hanno i tre lati uguali) viene prima del secondo ed è infatti la proposizione 8 per la cui dimostrazione si fa ancora uso del movimento, mentre quello che viene chiamato comunemente secondo criterio è la proposizione 26. Il motivo per cui normalmente viene invertito l’ordine (e viene usato il movimento per la dimostrazione del secondo criterio) è che la proposizione 8 fa uso della proposizione 7, una proposizione assai astratta, per cui si preferisce usare un altro approccio.

1.16 La proposizione 17

La proposizione dice che

> Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῇ μεταλαμβανόμεναι.
>
> Per ogni triangolo, due angoli presi insieme sono meno di due angoli retti

detto in modo più chiaro:

La somma di due angoli interni di un triangolo è inferiore a un angolo piatto.

Questo teorema è apparentemente superfluo perché, come poi si vedrà, la somma dei tre angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (due angoli retti, dice Euclide nella proposizione 32). Tra l'altro la proposizione non viene usata in seguito, cosa abbastanza strana nell'impianto generale del Libro primo.
Come mai Euclide enuncia senza necessità la versione debole di un teorema che verrà presto migliorato?

La risposta è questa:

Per dimostrare questo teorema non occorre il famoso quinto postulato, indispensabile invece per la versione "forte" del teorema.

Le prime 28 proposizioni del Libro 1 non fanno uso del quinto postulato. Euclide è ben conscio del fatto che il quinto postulato è particolare e non ne fa uso fintantoché non gli è indispensabile.
Nei secoli successivi si tentò invano di dimostrare o quantomeno di fare a meno dello strano quinto postulato. Il miglior risultato in questo senso è l'enunciato equivalente di Playfair che viene comunemente usato in luogo di quello più ermetico di Euclide.
Tutti i tentativi alla fine ebbero il pregio di condurre nel XIX secolo alla dimostrazione del fatto che il quinto postulato era indimostrabile e indispensabile per il prosieguo.

Euclide quindi, dopo 22 secoli ha avuto la sua rivincita.

"Io non sono stato in grado di dimostrare le proposizioni successive alla 28 senza usare il quinto postulato, ma, attenti!, neanche voi ci riuscirete!"
"E comunque con le mie prime 28 proposizioni e soprattutto con la 17, vi ho mostrato fino a che punto si può arrivare senza adoperarlo."

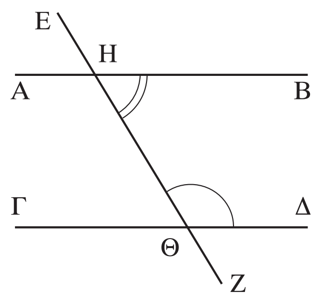
Nel XIX secolo fu creata la prima delle cosiddette geometrie non-euclidee, la geometria iperbolica, nella quale non vale il quinto postulato.
In questa geometria succedono cose strane: per esempio si possono condurre infinite parallele a una retta da un punto esterno e la somma degli angoli interni di un triangolo non è un angolo piatto. Non vale nemmeno il teorema di Pitagora.
Ma in questa strana geometria sono comunque valide le prime 28 proposizioni di Euclide.

Euclide è quindi paradossalmente il primo geometra non-euclideo!

1.17 Le proposizioni 28 e 29

La proposizione 28 è quindi lo spartiacque tra la geometria non-euclidea e quella euclidea. Vediamo in parole povere cosa dice:

> Se due rette sono tagliate da una trasversale e la somma degli angoli interni è pari a due retti, le due rette sono parallele.



Dopo aver dimostrato la proposizione 28, Euclide vorrebbe, nella proposizione 29 dimostrare il teorema inverso, cioè che

> Se ho due rette parallele tagliate da una trasversale, allora la somma degli angoli interni è pari a due retti.

Per la prima volta è costretto a usare il quinto postulato. È ben conscio del fatto che non può farne a meno e in qualche modo lancia la sua sfida: Io non riesco a provarlo senza il mio quinto postulato, ma so bene che nessun altro ci riuscirà.
E 22 secoli dopo dobbiamo riconoscere che aveva ragione.

1.18 La proposizione 47

È il celebre teorema detto di Pitagora. Euclide non dà nomi ai teoremi e non cita mai né Pitagora, né altri matematici. L'attribuzione a Pitagora pare sia parecchio posteriore e numerose sono le leggende a proposito. C'è chi dice che abbia sacrificato cento buoi (ἑκατόμβη) per ringraziare gli dei della scoperta, c'è chi dice che ne abbia sacrificato uno solo, e c'è chi dice che Pitagora era, usando un termine moderno, un animalista e mai avrebbe potuto fare niente di simile. Ma d'altra parte già ai tempi di Platone la figura di Pitagora era avvolta nella leggenda.

Comunque esaminando il primo Libro, si ha la sensazione, come dice lo Zeuthen, celebre esegeta di Euclide, che tutto l'impianto del primo libro sia stato fatto proprio in funzione di questa che è la penultima proposizione.

Nel medioevo il teorema era detto "pons asinorum", ovvero lo spartiacque tra gli ignoranti (asini) e coloro che finalmente avevano appreso la geometria.

Ecco l'enunciato originale:

> Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

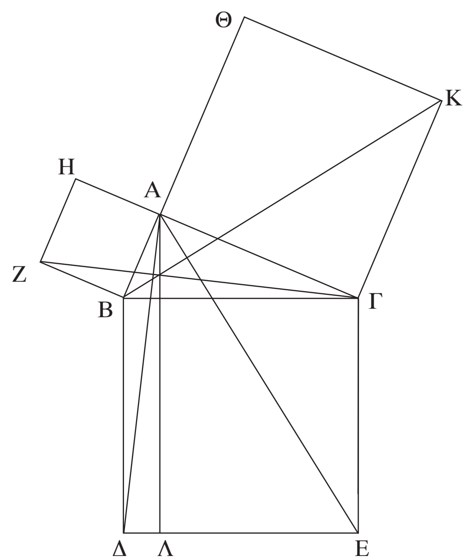
Letteralmente:

> Nei triangoli rettangoli, il quadrato (τετράγωνον) sul lato (πλευρά) teso sotto (ὑποτεινούσα) l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che circondano l'angolo retto

Da notare che non viene qui usata la parola cateto (anche se nel primo Libro κάθετος εὐθεῖα significa retta ortogonale), mentre la parola ipotenusa (ὑποτεινούσα) sta appunto per retta che è tesa sotto, che sta sotto (l'angolo retto)

La dimostrazione del teorema è leggermente differente da quella che si trova solitamente nei libri di geometria e val la pena di esaminarla. Il disegno euclideo viene talvolta detto

> mulino a vento o coda di pavone o sedia della sposa



Si dimostra innanzitutto che i due triangoli $AB\Delta$ e $ZB\Gamma$ sono uguali.
Poi si nota che il triangolo $ZB\Gamma$ è equivalente alla metà del quadrato $ABZH$ perché hanno stessa base ZB e sono compresi tra due rette parallele (proposizione 41).
Analogamente il triangolo $AB\Delta$ è equivalente alla metà del parallelogramma $B\Lambda$ perché hanno stessa base $B\Delta$ e sono compresi tra due rette parallele.

In conclusione il parallelogramma $\mathrm{B\Lambda}$ è equivalente al quadrato ABZH.

Questa parte della dimostrazione è quella che viene comunemente detto Primo Teorema di Euclide.

Lo stesso ragionamento viene fatto per l'altro cateto e si giunge alla conclusione.

Esistono decine e decine di dimostrazioni diverse del teorema; Euclide stesso ne darà un'altra nel Libro VI usando le proporzioni.
Alcune delle dimostrazioni sono molto belle, come quelle celebri di Barravalle e di Perigal. Ma il pregio della dimostrazione euclidea della Proposizione 47 sta nella sua minimalità.
Vengono infatti usati i teoremi più elementari della geometria del piano e la costruzione è semplicissima: vengono tracciate solo cinque rette.
Tutte le altre dimostrazioni usano concetti più avanzati di quelli espressi nel primo Libro degli Elementi o si basano su costruzioni comunque più complesse.
E val la pena di notare che si tratta della dimostrazione più antica che ci sia giunta, dato che si ignora quale fosse la dimostrazione originale attribuita a Pitagora.

La Proposizione 47 è la penultima del primo Libro. La successiva è il teorema reciproco, stranamente ignorato dalla maggior parte dei libri moderni: se in un triangolo vale la relazione pitagorica tra i quadrati costruiti sui lati, il triangolo è rettangolo.

1.19 Alcune curiosità tratte dai Libri successivi

La sezione aurea

Viene trattata da Euclide nel secondo, sesto e tredicesimo Libro, ma le espressioni "sezione aurea" e "divina proporzione" sono molte tarde; risalgono al medioevo.
L'espressione usata da Euclide è "divisione in estrema e media ragione".
Per esempio nella proposizione 2 del libro 6 si chiede di

> Dividere una data retta terminata in estrema e media ragione.
>
> Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Le proporzioni

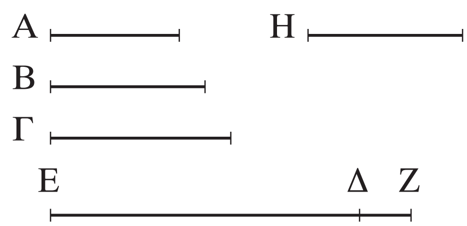
Nel quinto Libro si definisce la proporzione (ἀναλογία).

La definizione di quattro grandezze che stanno in proporzione è molto complicata e fu criticata come inutilmente pedante da molti, tra cui Galileo.

Solo nella seconda metà del XIX secolo il matematico tedesco R.Dedekind diede la complessa definizione di numero reale che viene tuttora usata e che, per sua stessa ammissione, era ispirata a questa definizione euclidea.
Euclide ha quindi introdotto un concetto assai sofisticato che è rimasto incompreso per 22 secoli.

I numeri

Nel settimo ottavo e nono Libro, Euclide tratta i numeri che però sono visti come grandezze. Questo è un tipico disegno della trattazione



Tra le definizioni sono interessanti quelle di

- Numero primo : πρῶτος ἀριθμός
- Massimo Comun Divisore : τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον

Il risultato più famoso è la proposizione 20 del libro 9 nella quale si dimostra che esistono infiniti numeri primi.
La figura sopra si riferisce infatti a questa proposizione.
Questo teorema è spesso riportato come "Secondo teorema di Euclide".

Da notare che quello che nei libri scolastici correnti viene detto "secondo teorema di Euclide" non appare esplicitamente negli Elementi.
Anche quello che nelle scuole è noto come primo teorema di Euclide, negli Elementi è solo una parte del teorema di Pitagora.
Solitamente in letteratura viene indicato come "primo teorema di Euclide" il teorema che afferma che ogni numero intero è scomponibile in un solo modo come prodotto di potenze di numeri primi.

Le grandezze incommensurabili

Il decimo Libro è interamente dedicato alle grandezze incommensurabili. Il libro è notevolmente astratto e di non facile lettura. È anche il libro più vasto e contiene

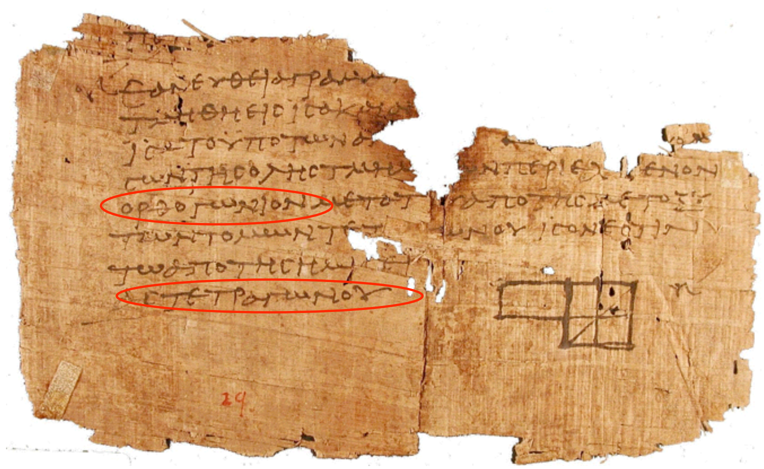
ben 115 proposizioni.
Val comunque la pena notare che l'aggettivo incommensurabile è la traduzione latina letterale di ἀσύμμετρον.

1.20 Conclusione

A Ossirinco, città nel medio corso del Nilo, terza città dell'Egitto antico e centro culturale, grazie al clima asciutto è stato possibile trovare molti papiri di età imperiale in buono stato di conservazione.
Sono così tornati alla luce importanti testi greci che si credevano perduti, tra cui poesie di lirici, frammenti dei tragici, commedie di Menandro e testi religiosi cristiani. Tra le altre cose sono stati rivenuti frammenti degli Elementi di Euclide.
Nella figura la riproduzione di un celebre papiro contenente parte della proposizione 5 del Libro 2, che tra l'altro è una proposizione assai interessante perché in pratica è la dimostrazione per via geometrica della nota identità

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Inoltre viene illustrata una procedura che più tardi sarà detta ἔλλειψις, cioè "ellissi" o "difetto" e che darà origine all'ellisse, la curva studiata da Apollonio di Perga e da Archimede.



Come si vede il testo è scritto in lettere maiuscole, senza spiriti, senza accenti e senza spazi tra le parole.
La figura non ha lettere per individuare i punti.
Ma con un po' di attenzione è possibile per esempio riconoscere le parole

ὀρθογώνιον e τετράγωνον
quadrato e rettangolo.

Possiamo concludere che:

Come dice l'aneddoto riferito da Proclo, non esiste una via regia alla Geometria, ma quella che troviamo nei libri attuali è sicuramente più agevole.

Bibliografia essenziale

[1] Euclide, "Gli elementi" a cura di A.Frajese e L.Maccioni, Mondadori (2008)

[2] Lucio Russo, "La rivoluzione dimenticata", Feltrinelli (2009)

[3] Euclide, "Euclid's Elements of Geometry" (in greco con traduzione in inglese) a cura di Richard Fitzpatrick, http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html